Консультация к экзамену.

1. Определение ант. игры и её решения.

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$$

Решение игры: (x^0, y^0, v), где (x^0, y^0) – с.т., $v = F(x^0, y^0)$

$$F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Лемма. (x^0, y^0), (x^*, y^*) – с.т. $\Rightarrow F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$

2. Необх. и дост. условие сущ. с.т.

Т1.1 1) $\max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y) = \min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x,y) \quad (\alpha)$

2) (α) $X^0 \times Y^0$ X^0 – мн-во максиминных, Y^0 – мн-во минимакс. стратегий.

Может ли 8×8-матрица иметь ровно 26 с.т.?

3. Условия сущ. максим. и миним. стратегий.

Т 1.2 $F(x,y)$ непр. $X \times Y$ X, Y - компакты м. пр-в.

1) $W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x,y)$ непр.

2) $Y(x) = \{y(x)\}$ $\forall x \in X$. Тогда $y(x)$ непр.

лекции 1) док-во использует непр. по Коши, 2) по Гейне

4. Теорема сущ. С.Т. у вогн. вып. ф-ии.

Т 1.3. Ещё две теоремы сформулировать

$\bigcap_x \{y(x)\} = Y(x)$ $\forall x \in X \Rightarrow$ сущ. С.Т. $(x^*, y(x^*))$, x^* - максиминная стр.

$\bigcup_y \{x(y)\} = X(y)$ $\forall y \in Y \Rightarrow$ С.Т. $(x(y^*), y^*)$ y^* - минимакс. стратегия

задачи на поиск С.Т.

5. Смешанные расшир. ант. игр.

$\Gamma = \langle P, Q, A(p,q) \rangle$ $\Gamma = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \rangle$

$\Gamma = (A_{ij})_{m \times n}$, $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$

$\varphi(x) = P(\xi \le x)$. свойства. Теорема Фубини:

$$F(\varphi,\psi) = \int_X F(x,\psi)\,d\varphi(x) = \int_Y F(\varphi,y)\,d\psi(y).$$

6. Основная теорема матр. игр.

Т 1.4. (p^0, q^0, v) – реш. в смешанных стр.

$$A(p,q^0) \le A(p^0,q^0) \le A(p^0,q^0) \quad \forall p \in P \ \forall q \in Q.$$

Ссылка на Т. 1.3. Проверка условий т. 1.3.

7. Основная теорема непрерывных игр. (без док-ва)

теорема Хелли о слабой комп. мн-ва $\{\varphi\}$.

слабая сходимость $\varphi^k \xrightarrow{сл.} \varphi^0$, если $\forall$ непр $h(x)$ $\int_a^b h(x)\,d\varphi^k(x) \to \int_a^b h(x)\,d\varphi^0(x)$

лемма о сущ. максим. и минимакс. смешанных стратегий.

вторую лемму о близости максиминов и минимаксов для близких функций выигрыша можно не доказывать.

Т 1.5 док-во. В ходе док-ва ссылка на т. 1.4.

8. свойства решений в см. стратегиях ант. игр. док-ва для непр. игр, для матричных игр нет, но в задачах они встречаются.

Т1.6. $F(x, y^0) \le v \le F(\varphi^0, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ (*) (док-во)

Т1.7 $A(i, q^0) \le v \le A(p^0, j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ (*)

Задачи на использование (*)

Т.1.8. 1) $\forall \varphi$ $\inf\limits_{\psi} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$ (док-во)

2) $\forall \psi$ $\sup\limits_{\varphi} F(\varphi, \psi) = \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$

Следствие. $v = \max\limits_{\varphi} \min\limits_{y} F(x, y) = \min\limits_{\psi} \max\limits_{x} F(x, \psi)$ (док-во)

Т1.8' 1) $\forall p$ $\min\limits_{q} A(p, q) = \min\limits_{j} A(p, j)$

2) $\forall q$ $\max\limits_{p} A(p, q) = \max\limits_{i} A(i, q)$

Следствие. $v = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{1 \le j \le n} A(p, j) = \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q)$

Свойство дополняющей нежесткости.

Определение $Sp(\varphi)$.

Т.1.9 (φ^0, ψ^0, v) – реш. в смеш. стр.

1) $x \in Sp(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = v$ (док во)

2) $y \in Sp(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = v$

Следствие.

Т 1.10. (p^0, q^0, v) – реш. в см. стр. матр. игры

1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v$

2) $q_j^0 > 0$ $A(p^0, j) = v$

Следствие 1) $A(i, q^0) < v \Rightarrow p_i^0 = 0$

2) $A(p^0, j) > v \Rightarrow q_j^0 = 0$.

9. Теорема о доминир. строк и столбцов.
В док-ве теоремы о доминир. строк при строгом доминировании ссылка на свойство доп. нежёсткости $A(i_1, q^0) < v \Rightarrow p^*_{i_1} = 0$. (сл. Т. 1.10)

10. Графический метод решения игр с матрицами $2 \times n$ и $m \times 2$.
При использовании формулы для v ссылка на сл. Т. 1.8! Построение опт. смеш. стратегии для матриц $2 \times n$ (с доказательством) {нижняя огибающая} для матриц $m \times 2$ построение (без доказательств). Верхняя огибающая.

11. Сведение решение матр. игр к паре двойств. задач лин. программирования. $v > 0$ (без потери общ.)

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to \min \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \geq 1,\ j=\overline{1,n} \quad (I) \qquad \sum_{j=1} a_{ij} w_j \leq 1,\ i=\overline{1,m} \quad (II)$$

$$z_i \geq 0,\ i=\overline{1,m} \qquad w_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}$$

свойство доп. нежёсткости

12. Решение ант игр с вып. и вогн. функциями выигрыша.

Т 1.14 $F(x,y)$ $\cap_x$ $\cap_y$ $v = \underline{v} = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(x,y) = \min_{y\in Y} F(x^0,y)$

Т.1.13 Теорема Каратеодори (без док-ва) $\varphi^0 = \sum_j q_j^0 I_{y^j},\ y^j \in Y^{ext}$

Т 1.15 $\cup_x$ $\cup_y$

$$v = \bar{v} = \min_y \max_x F(x,y) = \max_x F(x,y^0) \qquad \varphi^0 = \sum_i p_i^0 I_{x^i},\ x^i \in X^{ext}$$

Задачи. $F(\varphi^0, y) \geq v$ $\quad F'_y(\varphi^0, y^0) = 0$

$\varphi^0 = p_1^0 I_a + (1-p_1^0) I_b$ $\quad \Rightarrow p_1^0$.

13. Исследование модели "нападение-защита" в чистых стратегиях.

лекции $x \to y(x)$. При $\bar{v}$ ссылка на игру с матрицей $\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ $\mu_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

14. Исследование модели "нападение-защита" в смеш. стратегиях. Отметить случай седл. точки $\bar{v} = 0$.

$\bar{v} > 0 \Rightarrow$ седл. точки в чистых стратегиях не существует.

Док-во. $F(\varphi^0, y) \geq v = \bar{v} \ \forall y \in I$. $\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{x_i}$

Задача на использование ф-л $p_i^0 = \dfrac{1}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$, $i = \overline{1,n}$.

15. исслед. модели шумной дуэли.

$d^*: \; p_1(d) = 1 - p_2(d)$, $v = p_1(d^*)$

для бесшумной дуэли. $\underline{v} = \max\limits_{0 \le d \le d_0} p_1(d)(1 - p_2(d))$

$\overline{v} = p_1(d^*)$

задачи: $p_1(d) = 1 - d^2$, $p_2(d) = 1 - d$,

16. Определение многошаговой игры с полной информацией. игра в нормальной форме.

стратегии – наборы функций.

задачи: спички, задача Ласкера.

Одношаговая игра с полн. информацией.

x, y $\quad v = \underline{v}$, x^0 – максиминная $y(x)$ – ф-я наилучшего ответа

y, x $\quad v = \overline{v}$, y^0 – минимаксная $x(y)$.

17. Теорема Цермело о решении многошаговой игры с полн. инф. Метод динамич. пр-я. Т 1.16.

18. Ситуация равновесия в игре многих лиц и её недостатки.

1) Семейный спор 2) Дилемма заключённого

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ Равновесная стратегия не является максиминной.

В заочной книге другие примеры.

19. Теорема о сущ. сит. р. в игре многих лиц.
Для n лиц используется теорема Брауэра о неподвижной точке (сформулировать).
В зелёной книге для двух лиц, а для многих лиц F_k квазивогнуты и теореме Какутани.

20. Метод поиска сит. равновесия

$$X_k(x_l, l \neq k) = \operatorname{Argmax}_{x_k \in X_k} F(x), \quad \text{с.р. } x_k^0 \in X_k(x_l^0, l \neq k), \; k = \overline{1,S}$$

Если $X_k(x_l, l \neq k) = \{f_k(x_l, l \neq k)\}$, то система

$$f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0, \quad k = \overline{1,S}$$

решение системы сущ. по теореме Брауэра.

21. Свойства сит. равновесия в смешанных стратегиях.

$$A(i,q^0) \le A(p^0,q^0),\ i=\overline{1,m}, \quad B(p^0,j) \le B(p^0,q^0),\ j=\overline{1,n} \qquad (*)$$

Свойство дополняющей нежесткости

1) $p_i^0>0 \Rightarrow A(i,q^0)=A(p^0,q^0)$ 2) $q_j^0>0 \Rightarrow B(p^0,j)=B(p^0,q^0)$.

следствие. Задача $A=\begin{pmatrix}3&7\\5&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&2\end{pmatrix}$ Найти все ситуации равновесия в чистых и см. стратегиях. $(i^0,j^0)=(2,1),(1,2)$.

В смешанных $q^0=(q_1^0,q_2^0)$. Если $q_1^0=1 \Rightarrow p_1^0=0$, $q_1=0 \Rightarrow p_1^0=1$.

Пусть $0<q_1^0<1 \Rightarrow B(p^0,1)=B(p^0,2)=v_2 \Rightarrow p_1^0=1$. По свойству доп. нежесткости

$$A(1,q^0)=3q_1^0+7(1-q_1^0)=v_1$$

$$A(2,q^0)=5q_1+1-q_1^0 \le v_1 = 3q_1^0+7(1-q_1^0) \Rightarrow$$

22. Решение биматр. игр. в смеш. страт. $\qquad \frac{3}{4}\le q_1^0\le 1$.

Т 2.3 и алгоритм поиска с.р. Обязательна иллюстрация для матриц $2\times n$ и $m\times 2$.

23. Решение игры Γ_1. Равновесие по Штакельбергу.
Определение Γ_1, экономич. интерпретация
Наилучший гар. результат. Док-во существования
равновесия по Штакельбергу.
Задачи на решение для игры на прямоуг.

24. Теорема Гермейера о решении игры Γ_2.
Пояснить, почему используется функция наилучшего
ответа первого игрока, благожелательная по отношению ко второму.

$$f_A^{\circ}(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E \\ f^H(y), & y \notin E \end{cases}$$

$$f^*(y) \in \operatorname{Argmax}_{x \in X(y)} G(x, y) \qquad X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F(x, y).$$

25. Задача многокрит. оптимизации и условия существ. оптимальных по Парето стратегий.

Т 3.1 $W_i(x)$ непр. на компакте X, $i=\overline{1,s}$.

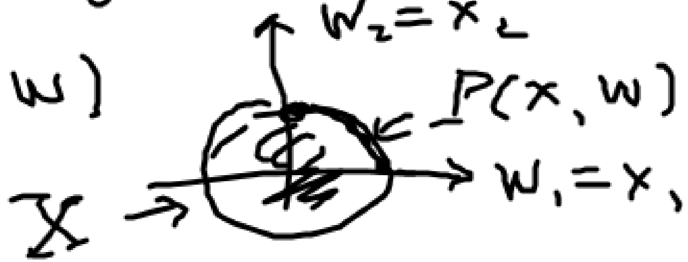
$$P(X,W) \neq \emptyset \Rightarrow S(X,W) \neq \emptyset. \qquad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x)$$

26. Представление мн-ва $S'(X,W) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_2(\lambda)$,

$$X_2(\lambda) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} \min_{1 \le i \le n} \lambda_i W_i(x)$$

$W_i(x) > 0$, $i=\overline{1,s}$. Почему так можно считать без потери общности.

Задачи на поиск $P(X,W)$



доказать.

27. Алгоритм поиска $\underline{P}(X, W)$ на конечном множестве X. Почему после завершения алгоритма $\Pi = \underline{P}(X, W)$.

Задача. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ найти все (i,j) – опт. по Парето и Слейтеру по критерию $W = (a_{ij}, b_{ij})$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $(3,2)$ $(7,4)$ $(5,5)$ $(5,6)$

28. необх. и дост. условие для $x^0 \notin S(X, W)$, когда $W_i(x)$ – вогнутые дифференцируемые критерии.

Опр. допустимого направления в точке x^0: $\alpha \in \mathcal{J}(x^0)$: $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \quad x^0 + \varepsilon\alpha \in X$.

$x^0 \notin S(X, W) \Leftarrow\Rightarrow \exists \alpha \in \mathcal{J}(x^0)$: $(\alpha, W_i'(x^0)) > 0$, $i = \overline{1, s}$

Где в док-ве используется вогнутость.

Случай строго вогнутых W_i:

29. Задача принятия решений при наличии бинарного отношения.
Опр. бинарного отношения, его свойства.
Док-во эквивалентности двух определений ядра для асимметр. бинарного отношения.

30. Метод сужения мн-ва оптимальных по Парето стратегий. Экспертная информация A_1, A_2. Непротиворечивость: антирефлексивность отношения $\mathcal{R}$. Отношения S_{rt}, T_{rt} и R.
Теорема. R — ациклическое и транзитивное
$C(P(\mathcal{Y}), R)$ — задача сужения.

31. Задача сужения мн-ва стратегий, оптимальных по Парето для равноценных критериев.

Лемма. Если $y P y' \Rightarrow \theta(y) P \theta(y')$

Теорема о представлении R: $y R y' \Leftrightarrow \theta(y) \underline{P} \theta(y')$

32. Математическая модель операции.

Контролируемые, неопр., случайные факторы.

Примеры информационных гипотез и соответствующих множеств стратегии. M_0, M_u, $\widehat{M}$.

$M_u = \{\tilde{x}(y)\}$, $\widehat{M} = \{\tilde{x}(y, z)\}$

Игровая модель операции.

33. Оценка эффективности стратегии (в том числе и смешанной)
Принцип гарантированного результата.
Основные предположения. Противник ~~не~~ знает z.
$$W(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z)\, d\theta(z)$$
$$W(\varphi) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \int_{M_0} F(x, y, z)\, d\varphi(x)\, d\theta(z)$$
34. Вид наилучшего гар. результат, когда в множестве стратегий существ. абсолютно оптимальная.
θ – вер. распределение для z известно. Абс. опт. стратегия $\tilde{x}_a : F(\tilde{x}_a, y, \theta) = \max_{\tilde{x} \in M} F(\tilde{x}, y, \theta)$
Теорема. Если $\exists\, \tilde{x}_a \in M$, то
$$F_2(M) = \inf_{y \in N} \max_{\tilde{x} \in M} F(\tilde{x}, y, \theta).$$
Если $\tilde{x}(y)$, то $\inf_y \max_{x \in M_0} F(x, y, \theta)$

Вывод формул $f_2(M_\kappa) = \inf_{y\in N} \max_{x\in M_0} \bar{F}(x,y,\theta)$

$$F_2(\tilde{\kappa}) = \inf_{y\in N} \int_Z \max_{x\in M_0} F(x,y,z)\,d\theta(z)$$

Если в последнем случае противник знает z

$$F_2(\tilde{\kappa}) = \int_Z \inf_{y\in N} \max_{x\in M_0} F(x,y,z)\,d\theta(z)$$

Задача на вычисление по этим формулам.

$F(i,j,z)$ $i\in\{1,2\}$, $j\in\{1,2\}$ j неопр. фактор.

$$F_2(M_u) = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} \int_Z F(i,j,z)\,d\theta(z) \qquad i^0(j)\in \operatorname{Arg}\max_{i=1,2} \bar{F}(i,j,\theta)$$

$$F_2(\tilde{\kappa}) = \min_{j=1,2} \int_Z \max_{i=1,2} F(i,j,z)\,d\theta(z) \qquad i^0(j,z)\in \operatorname{Arg}\max_{i=1,2} F(i,j,z)$$

35. Теорема о произв. по направлению ф-ции максимума и следствие.
Док-во теоремы и следствия.

36. Необходимые условия для максиминной стратегии из отрезка $M_0 = [a, b]$ и следствие.
Использование необх. условий для поиска максиминных стратегий.

37. Принцип уравнивания Гермейера. $f_i(t)$ возр. непр.

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0) \qquad (\mathrm{I})$$

$$f_1(0) \le f_2(0) \le \dots \le f_n(0) \qquad f_1(x_1^0) = \dots = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0) \quad (1)$$

$$x_{k+1}^0 = \dots = x_n^0.$$

Если $f_1(0) \ge \dots \ge f_n(0)$

$$f_{k-1}(0) > f_k(x_k^0) = \dots = f_n(x_n^0) \qquad x_1^0 = \dots = x_{k-1}^0 = 0. \quad (2)$$

$$\min_{x \in M_0} \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i) \qquad f_i(t) \text{ убывают. } f_i(t) \text{ остаточный ущерб.}$$

$f_1(0) \ge \dots \ge f_n(0)$

(1), но $f_k(x_k^0) > f_{k+1}(0)$,

Если $f_1(0) \le \dots \le f_n(0)$, то $f_{k-1}(0) < f_k(x_k^0)$.

Вкладываем в пункты, где ущерб наибольший.

Алгоритм поиска решения задачи (I)

решаем систему $f_i(x_i^0)=C$, $i=\overline{1,k}$ $\sum_{i=1}^{k} x_i = A$, $x_i \geq 0$, $i=\overline{1,k}$

$k=n, n-1, \ldots$ пока $C < f_{k+1}(0)$.

38. Условия оптимальности и алгоритм решения задачи дискретного максимина.

$M_0' = \{x \in M_0 \mid x_i - \text{целые}\}$

условие оптимальности.

$$x^*: \ x_j^* > 0 \implies f_j(x_j^*-1) \leq \min_{1\leq i\leq n} f_i(x_i^*)$$

Если $f_1(0) \geq \ldots \geq f_n(0)$, то условие прежнее.

В задаче $\min\limits_{x\in M_0'} \max\limits_{1\leq i\leq n} f_i(x_i) = \max\limits_{1\leq i\leq n} f_i(x_i^*)$

$$x^*: \ x_j^* > 0 \implies f_j(x_j^*-1) \geq \max_{1\leq i\leq n} f_i(x_i^*)$$

Алгоритм.

99. Лемма Гиббса. Задача поиска объекта

$\max\limits_{x\in K_0} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i^0)$ (П) $\wedge f_i(t)$

$f_1'(0) \geq \dots \geq f_n'(0)$. x^0: $f_1'(x_1^0) = \dots = f_k'(x_k^0) = \lambda \geq f_{k+1}'(0)$ (3)

$\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^0 = A$

$f_i''(0) < 0$

Если $f_1'(0) \leq \dots \leq f_n'(0)$ x^0: $f_k'(x_k^0) = \dots = f_n'(x_n^0) = \lambda$ (4)

$f_i(t)$ вып. убывают $f_{k-1}'(0) \leq \lambda$.

$\min\limits_{x\in K_0} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i^0)$ $f_i(t)$ - остаточный ущерб.

$f_1'(0) \leq \dots \leq f_n'(0)$ (3) с $\lambda \leq f_{k+1}'(0)$

$f_1'(0) \geq \dots \geq f_n'(0)$ (4) с $f_{k-1}'(0) \geq \lambda$.

40. Критерий Гросса и алгоритм решения задачи выпуклого целочисл. программирования

$f_i(t)$ $\quad f_i(t+1) - f_i(t) \leq f_i(t) - f_i(t-1) \quad 0<t<\Delta.$

$$\max_{x \in M_0'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*).$$

$$x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left[f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*) \right] \qquad (5)$$

т.е. при положительном вложении дискретная производная велика.

$f_i(t)$ $\quad f_i(t+1) - f_i(t) \geq f_i(t) - f_i(t-1)$

$$\min_{x \in M_0'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*)$$

$$x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f(x_j^* - 1) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left[f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*) \right]$$

Алгоритм поиска x^*.